TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth,
M.Sc. Chris Köcher
WS 2020/21

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten, Sprachen und Komplexität – Übung 14

Abgabe: bis Mittwoch, der 03. Februar 2021, um 09:00 Uhr via Moodle.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Klausurpunkte umgerechnet.

Aufgabe 1* — 2+3 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme in P sind. Beschreiben Sie dafür jeweils eine Turingmaschine, die das Problem in polynomieller Zeit entscheidet.

(a) DREIECK ist die Menge der Graphen, die ein Dreieck enthalten.

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Frage: Gibt es ein Dreieck in G, d.h. gibt es Knoten $u, v, w \in V$ mit $u \neq v, u \neq w, v \neq w$ und $(u, v), (u, w), (v, w) \in E$?

(b) BIP ist die Menge der bipartiten Graphen.

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Frage: Gibt es Mengen $A, B \subseteq V$ mit $A \cap B = \emptyset$, sodass jede Kante in A beginnt und in B endet oder umgekehrt? D.h. für jede Kante $(v, w) \in E$ gilt $v \in A$ und $w \in B$ oder $v \in B$ und $w \in A$.

Aufgabe 2* — 2 Punkte

Wir betrachten folgendes Problem (Clique):

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es k Knoten in G, die paarweise verbunden sind?
D.h. gibt es $v_1, \dots, v_k$ mit $v_i \neq v_j$ und $(v_i, v_j) \in E$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$.

Sei CLIQUE die Menge $\{(G, k) \mid G \text{ hat } k \text{ paarweise verbundene Knoten}\}$. Zeigen Sie, dass CLIQUE in NP ist.

Aufgabe 3* — 2+4 Punkte

Wir betrachten folgendes Problem (2MP):

Eingabe: Ein multivariates Polynom p, also ein Polynom in mehreren Variablen $x_1, \dots x_k$, $k \in \mathbb{N}$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Frage: Gibt es $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $p(n_1, \dots, n_k) \bmod 2 = 0$?

Sei 2MP die Menge der multivariaten Polynome, die modulo 2 eine Nullstelle haben. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie ,dass 2MP in NP ist.

(b) Zeigen Sie, dass SAT $\leq_P$ 2MP.

Es folgt, dass 2MP NP-vollständig ist (vgl. Folie 27.8).

Aufgabe 4* — 2 Punkte

Zeigen Sie, dass die Polynomialzeit-Reduktions Relation $\leq_P$ transitiv ist.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

Sei $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Wir betrachten das folgende Problem (qMP):

Eingabe:	Ein multivariates Polynom p, also ein Polynom in mehreren Variablen $x_1, \ldots x_k$, $k \in \mathbb{N}$ mit ganzzahligen Koeffizienten.
Frage:	Gibt es $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $p(n_1, \ldots, n_k) \bmod q = 0$?

Sei qMP die Menge der multivariaten Polynome, die modulo q eine Nullstelle haben. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie, dass qMP in NP ist.

(b) Zeigen Sie, dass qMP NP-hart ist.

(c) Sei jetzt die Anzahl der Variablen, k, fest. Zeigen Sie, dass dann qMP $\in$ P.

Aufgaben zum Selbststudium

Aufgabe 6

Wir betrachten folgendes Problem (Independent Set):

Eingabe:	Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Gibt es k Knoten in G, die paarweise nicht verbunden sind? D.h. gibt es $v_1, \ldots, v_k$ mit $v_i \neq v_j$ und $(v_i, v_j) \in E$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$.

Sei INDSET die Menge $\{(G, k) \mid G$ hat k paarweise nicht verbundene Knoten$\}$.
Zeigen Sie, dass CLIQUE $\leq_P$ INDSET gilt.

Aufgabe 7

Das *beschränkte Post'sche Korrespondenz Problem* (kurz BPCP) ist wie folgt definiert:

Eingabe:	$(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^+ \times \Sigma^+$ und eine unär kodierte Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Frage:	Gibt es eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_\ell$ mit $\ell \leq n$ und $x_{i_1} \ldots x_{i_\ell} = y_{i_1} \ldots y_{i_\ell}$?

Zeigen Sie, dass BPCP in NP ist.

Aufgabe 8

Für eine Komplexitätsklasse K sei coK $= \{\overline{A} \mid A \in \mathsf{K}\}$ die Klasse der Probleme deren Komplement in K ist. Es gilt P = coP (Warum?). Erklären Sie, weshalb ein analoges Argument für NP und coNP fehlschlägt.

Anmerkung: Es ist im Übrigen nicht bekannt, ob NP = coNP gilt.

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass das k-Färbbarkeitsproblem auch für alle $k > 3$ NP-vollständig ist.