TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
WS 2021/22

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten, Sprachen und Komplexität – Übung 2

Abgabe: bis Montag, der 25. Oktober 2021, um 15:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer und Übungsgruppe an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Aufgabe 1* — 3+3 Punkte

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Konstruieren Sie die folgenden Sprachen aus den Sprachen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ und Σ mithilfe der Operationen $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\cdot$ und *.

- (i) $L_i = \{w \in \Sigma^* \mid \text{nach jedem Auftreten von } a \text{ in } w \text{ folgt irgendwann ein } b\}$
  Hinweis: Es gilt $babab, caab, bbb \in L_i$, aber $ba, accc \notin L_i$.
- (ii) $L_{ii} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \bmod 2 = 0 \text{ und } |w|_b \bmod 3 = 0\}$
- (iii) $L_{iii} = \{w \in \Sigma^* \mid abc \text{ ist } \textbf{kein} \text{ Infix von } w\}$

(b) Geben Sie für die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$ möglichst einfache Beschreibungen analog zu Aufgabenteil (a) an.

- (i) $K_i = \Sigma^* \setminus (\Sigma^*\{b\}\Sigma^*)$
- (ii) $K_{ii} = \left(\{a\}^+ \cup \{b\}^+\right)^+$
- (iii) $K_{iii} = (\Sigma^* \setminus (\Sigma^*\{aa, bb\}\Sigma^*)) \cap \{a\}\Sigma^*\{b\}$

Aufgabe 2* — 3 Punkte

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma^{\leq n} = \bigcup_{i \leq n} \Sigma^i$ die Menge der Wörter in Σ^* deren Länge höchstens n ist. Zeigen Sie per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $|\Sigma^{\leq n}| = 2^{n+1} - 1$.

Aufgabe 3* — 2+2+2 Punkte

Im Folgenden sei $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $L^* = (L^2)^*$ gilt.
Zeigen oder widerlegen Sie, dass $L^* = (L^*)^2$ gilt.

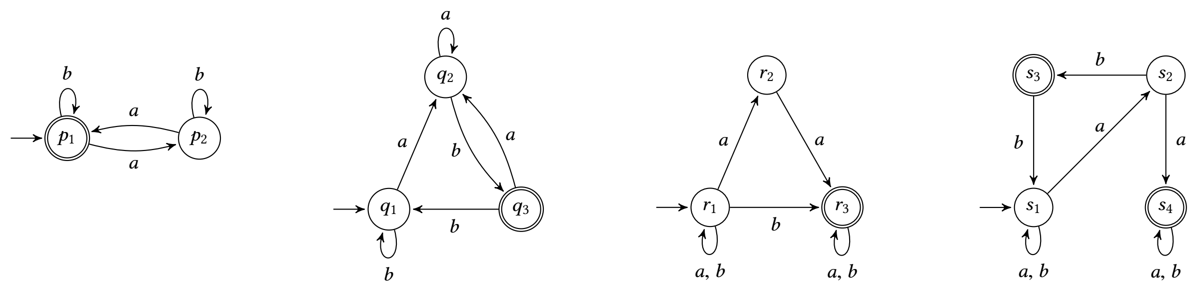
(b) Geben Sie eine Folge von Sprachen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so an, dass $K_n \subseteq \Sigma^*$ genau n Wörter besitzt und $(K_n)^2$ möglichst *wenige* Wörter enthält für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie eine Folge von Sprachen $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so an, dass $L_n \subseteq \Sigma^*$ genau n Wörter besitzt und $(L_n)^2$ möglichst *viele* Wörter enthält für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Es sind die DFAs M_1 und M_2 und die NFAs M_3 und M_4 (von links nach rechts) gegeben.



Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Geben Sie jeweils ein Wort an, das von M_i akzeptiert wird und eins, das von M_i nicht akzeptiert wird.

(b) Geben Sie analog zu Aufgabe 5 eine kurze aber präzise Beschreibung der Sprache $L(M_i)$ an.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$K_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält die Zeichenfolge } baba\}$$
$$K_2 = \Sigma^* \setminus \{aa, ab, aab\}$$

Geben Sie für alle $i \in \{1, 2\}$ jeweils einen DFA M_i mit $L(M_i) = K_i$ grafisch an. Wählen Sie jeweils ein Wort aus K_i und eins aus $\Sigma^* \setminus K_i$ aus und überprüfen Sie, ob M_i auf diesen korrekt arbeitet.
Geben Sie außerdem für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ einen möglichst kleinen NFA an, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_n = \{a^m \mid m \text{ ist durch eine der ersten } n \text{ Primzahlen teilbar}\}.$$

Hinweis: Ein DFA, der L_n akzeptiert braucht mindestens $n!$ Zustände.

Aufgabe 6

Konstruieren Sie mit der Potenzmengenkonstruktion einen DFA, der die gleiche Sprache akzeptiert, wie M_3 aus Aufgabe 4.