TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
SS 2024

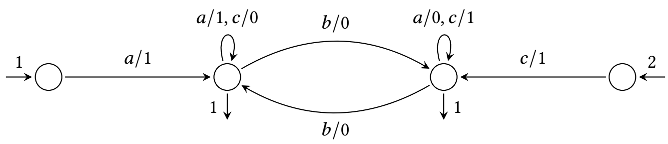
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automatentheorie – Übung 3

Besprechung: Dienstag, den 14. Mai 2024, um 13:15 Uhr

Aufgabe 1

Gegeben sei der folgende gewichtete Automat $\mathcal{A}$ über $\mathbb{N}_{\max,+}$:



Bestimmen Sie gewichtete Automaten $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ mit

(a) $[\![\mathcal{B}]\!] = [\![\mathcal{A}]\!] + [\![\mathcal{A}]\!]$,

(b) $[\![\mathcal{C}]\!] = [\![\mathcal{A}]\!] \odot [\![\mathcal{A}]\!]$,

(c) $[\![\mathcal{D}]\!] = [\![\mathcal{A}]\!] \cdot [\![\mathcal{A}]\!]$ und

(d) $[\![\mathcal{E}]\!] = [\![\mathcal{A}]\!]^*$.

Aufgabe 2

Sei S ein *endlicher* Semiring. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher folgendes Problem entscheidet:

Eingabe: Gewichtete Automaten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ über S.
Frage: Gilt $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{B}]\!]$?

Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Hinweis. Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 2.

Aufgabe 3

Sei Γ ein Alphabet und S ein Semiring. Für $v \in \Gamma^*$ und $r \in \langle\!\langle S \rangle\!\rangle$ sei $v^{-1}r$ die Potenzreihe mit $(v^{-1}r)(w) = r(vw)$ für alle $w \in \Gamma^*$. Für $r(w) = |w|$ und $v = a$ ergibt sich $(a^{-1}r)(w) = r(aw) = |w| + 1$.
Zeigen Sie, dass zu jedem gewichteten Automaten $\mathcal{A}$ und jedem $v \in \Gamma^*$ ein gewichteter Automat $\mathcal{B}$ mit $[\![\mathcal{B}]\!] = v^{-1}[\![\mathcal{A}]\!]$ existiert.

Aufgabe 4

Sei Γ ein Alphabet, S ein Semiring, $r \in S\langle\!\langle \Gamma^* \rangle\!\rangle$ eine formale Potenzreihe, sowie $n \in S$. Die *Niveaumenge von r zum Niveau n* ist die Menge

$$N_r(n) = \{w \in \Gamma^* : r(w) = n\}\,.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Sei S endlich. Zeigen Sie, dass für jede realisierbare Potenzreihe r über S und jedes $n \in S$ die Menge $N_r(n)$ regulär ist.

Hinweis. Passen Sie Ihre Lösung von Aufgabe 3 von Übungsblatt 2 geeignet an.

(b) Sei $S = \mathbb{N}_{\max,+}$. Zeigen Sie, dass für jede realisierbare Potenzreihe r über $\mathbb{N}_{\max,+}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_{\max,+}$ die Menge $N_r(n)$ regulär ist.

Selbststudium. Zeigen Sie die Aussage auch für $\mathbb{N}_{+,\cdot}$.

(c) Sei $S = \mathbb{Z}_{\max,+}$. Geben Sie eine realisierbare Potenzreihe r über $\mathbb{Z}_{\max,+}$ an, sodass die Menge $N_r(0)$ kontextfrei, aber nicht regulär ist.

Selbststudium. Zeigen Sie die Aussage auch für $\mathbb{Z}_{+,\cdot}$.