TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT **ILMENAU**

Automatentheorie – Übung 4

Besprechung: Dienstag, den 28. Mai 2024, um 13:15 Uhr

Aufgabe 1

Sei $\Gamma = \{a, b\}$. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem $\mathcal{G}_2$ über dem Semiring $\mathbb{N}_{+,\cdot}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= r_{1,0} + r_{1,1} \cdot X_1 + r_{1,2} \cdot X_2 \\ X_2 &= r_{2,0} + r_{2,1} \cdot X_1 + r_{2,2} \cdot X_2 \,, \end{aligned}$$

wobei für alle $w \in \Gamma^*$

$$\begin{aligned} &r_{1,0}(w) = |w|\,, && r_{1,1}(w) = |w|_a\,, && r_{1,2}(w) = |w|_b\,, \\ &r_{2,0}(w) = 2^{|w|}\,, && r_{2,1}(w) = |w|_b \quad \text{und} && r_{2,2}(w) = |w|_a \end{aligned}$$

gilt. Konstruieren Sie gewichtete Automaten $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ über $\mathbb{N}_{+,\cdot}$ so, dass $(X_1, X_2) = ([\![\mathcal{B}_1]\!], [\![\mathcal{B}_2]\!])$ eine Lösung des Gleichungssystems $\mathcal{G}_2$ ist.

Aufgabe 2

Seien Γ ein Alphabet und S ein endlicher Semiring. Für eine formale Potenzreihe $r \in S\langle\!\langle \Gamma^* \rangle\!\rangle$ und ein $n \in S$ sei

$$N_r(n) = \{w \in \Gamma^* : r(w) = n\}$$

die *Niveaumenge von r zum Niveau n* (vgl. Aufgabe 4 Übungsblatt 3).

Wir möchten zeigen, dass die Klasse der realisierbaren Potenzreihen über S unter dem Hadamard-Produkt abgeschlossen ist. Seien dazu $r, s \in S\langle\!\langle \Gamma^* \rangle\!\rangle$ realisierbare Potenzreihen.

(a) Zeigen Sie, dass $N_{r \odot s}(n)$ für jedes $n \in S$ regulär ist.

Hinweis. Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 4(a) von Übungsblatt 3.

(b) Zeigen Sie, dass $r \odot s$ realisierbar ist.

Aufgabe 3

Seien Γ ein Alphabet und R, S Semiringe. Zeigen Sie, dass, wenn die Klasse der realisierbaren Potenzreihen über den Semiringen R bzw. S jeweils unter dem Hadamard-Produkt abgeschlossen ist, die Klasse der realisierbaren Potenzreihen auch über dem Semiring $R \times S$ unter dem Hadamard-Produkt abgeschlossen ist.

Beispiel. Im Semiring $\mathbb{N}_{\max,+} \times \mathbb{Z}_{+,\cdot}$ ist $\binom{1}{3} + \binom{2}{5} = \binom{\max\{1,2\}}{3+5} = \binom{2}{8}$ und $\binom{0}{2} \cdot \binom{1}{4} = \binom{0+1}{2 \cdot 4} = \binom{2}{8}$. Die neutralen Elemente sind $\binom{-\infty}{0}$ und $\binom{0}{1}$.

Aufgabe 4

Sei $\Gamma = \{a, b\}$. Wir betrachten im Folgenden die Potenzreihen

$$s \colon \Gamma^* \to \mathbb{Z} \text{ mit } s(w) = |w|_a - |w|_b \qquad \text{und} \qquad t = s \odot s\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass t sowohl in $\mathbb{Z}_{\max,+}$, als auch in $\mathbb{Z}_{+,\cdot}$ realisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass t in keinem der Semiringe $\mathbb{N}_{\max,+}$ und $\mathbb{N}_{+,\cdot}$ realisierbar ist.