

Automatentheorie – Übung 5

Besprechung: Dienstag, den 11. Juni 2024, um 13:15 Uhr

Aufgabe 1

Sei $\Gamma = \{a, b\}$. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem \mathcal{G}_2 über dem Semiring $\mathbb{N}_+, :$

$$\begin{aligned} X_1 &= r_{1,0} + r_{1,1} \cdot X_1 + r_{1,2} \cdot X_2 \\ X_2 &= r_{2,0} + r_{2,1} \cdot X_1 + r_{2,2} \cdot X_2, \end{aligned}$$

wobei für alle $w \in \Gamma^*$

$$\begin{aligned} r_{1,0}(w) &= |w|, & r_{1,1}(w) &= |w|_a, & r_{1,2}(w) &= |w|_b, \\ r_{2,0}(w) &= 2^{|w|}, & r_{2,1}(w) &= |w|_b \quad \text{und} & r_{2,2}(w) &= |w|_a \end{aligned}$$

gilt. Konstruieren Sie gewichtete Automaten \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 über $\mathbb{N}_+,$ so, dass $(X_1, X_2) = ([[\mathcal{B}_1]], [[\mathcal{B}_2]])$ eine Lösung des Gleichungssystems \mathcal{G}_2 ist.

Aufgabe 2

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

- (a) Seien $\Gamma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $G = (\Gamma, \{S, A, B\}, S, P)$ die rechtslineare Grammatik mit den Produktionen

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aA \mid bA \mid bB \quad A \rightarrow \varepsilon \mid aA \mid bB \quad B \rightarrow \varepsilon.$$

Wir schreiben $G|_A$ für die Grammatik, die aus G entsteht, indem A als Startsymbol gesetzt wird (analog für $G|_B$).

Konstruieren Sie zu G ein Gleichungssystem \mathcal{G} derart, dass für alle $L \subseteq \Gamma^*$ gilt: L ist genau dann die erste Komponente einer Lösung von \mathcal{G} , wenn $L = L(G)$ ist.

- (b) Seien $\Gamma = \{a, b\}$ ein Alphabet und \mathcal{G}_2 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{1}_{(aa)^*} + \mathbb{1}_{\{a\}} \cdot X_1 + \mathbb{1}_{\{b\}} \cdot X_2 \\ X_2 &= \mathbb{1}_{\{b\}} + \mathbb{1}_{(aa)^*} \cdot X_2. \end{aligned}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G derart an, dass für alle $L \subseteq \Gamma^*$ gilt: L ist genau dann die erste Komponente einer Lösung von \mathcal{G}_2 , wenn $L = L(G)$ ist.

- (c) Sei Γ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass für eine Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) L ist regulär
- (ii) $\mathbb{1}_L$ ist Komponente einer Lösung eines wohlgeformten Gleichungssystems, in dem alle Koeffizienten Monome der Form $\mathbb{1}_\emptyset$ oder $\mathbb{1}_{\{a\}}$ für $a \in \Gamma$ und alle Konstanten entweder $\mathbb{1}_\emptyset$ oder $\mathbb{1}_\varepsilon$ sind
- (iii) $\mathbb{1}_L$ ist Komponente einer Lösung eines wohlgeformten Gleichungssystems, in dem alle Koeffizienten und Konstanten charakteristische Funktionen von regulären Sprachen sind.

Aufgabe 3

Wir betrachten in dieser Aufgabe ausschließlich Semiringe mit berechenbaren Operationen $+$ und \cdot . Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

- (a) Sei $S = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein nullteilerfreier Semiring, d.h., es gilt

$$\forall a, b \in S: a \neq 0 \wedge b \neq 0 \implies a \cdot b \neq 0.$$

Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem löst und begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens:

Eingabe: *deterministischer* gewichteter Automat \mathcal{A} über S

Frage: ist $\text{supp}(\llbracket \mathcal{A} \rrbracket)$ unendlich?

- (b) Geben Sie einen Semiring an, für den Ihr Algorithmus aus Teilaufgabe (a) nicht die korrekte Lösung liefert.
- (c) Für welche Semiringe S liefert Ihr Algorithmus die korrekte Lösung bei Eingabe eines *nichtdeterministischen* gewichteten Automaten \mathcal{A} über S ?