Automatentheorie Übungsaufgaben 6

(Besprechung am 25. Juni 2024, 13:15 Uhr im Sr H2506)

Review

Satz von Schützenberger

Für S .. Semiring, Γ .. Alphabet, $s \in S\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ gilt:

s ist *realisierbar* $\longleftrightarrow$ s ist *rational*

Folgerung (Kleene):

L regulär $\longleftrightarrow$ L aus endlichen Sprachen mittels $\cup$, $\cdot$ und * konstruierbar.

realisierbar	...	ex. gewichteter Automat
rational	...	mittels $+, \cdot$ und * aus den Monomen konstruierbar

Für S .. Semiring, $s \in S\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ sind äquivalent:

(1) s ist *realisierbar*

(2) s ist *rational*

(3) s ist Komponente einer *Lösung* eines wohlgeformten *Gleichungssystems*, in dem alle Koeffizienten und Konstanten Monome mit Träger in $\Gamma \cup \{\varepsilon\}$ sind.

Äquivalenz von gewichteten Automaten

Das *Äquivalenzproblem* ist *unentscheidbar* über $\mathbb{N}_{\max,+}$ und $\mathbb{Z}_{\max,+}$.

Idee:

- ▷ Satz (Minsky): $\exists$ 2Z-Maschine M mit unentscheidbarer “Sprache”
- ▷ konstruiere Automat $\mathcal{C}$ über $\mathbb{Z}_{\max,+}$, welcher zwischen Berechnungen und nicht-Berechnungen von M unterscheidet (Gewichte: $-\infty, -1, 0, 1$)
- ▷ konstruiere aus $\mathcal{C}$ Automat $\mathcal{B}_m$ über $\mathbb{N}_{\max,+}$ mit

$$[\![\mathcal{B}_m]\!] = [\![\mathcal{C}]\!] \quad \longleftrightarrow \quad M \text{ akzeptiert } m$$

Zwei-Zähler-Maschine .. DFA über $\{a_+, a_-, a_?, b_+, b_-, b_?\}$ mit zwei Zählern

Lineare Darstellungen

S .. *Körper*

lineare Darstellung $D = (n, \lambda, \mu, \gamma)$

$$n \in \mathbb{N} \qquad \lambda, \gamma \in S^n \qquad \underbrace{\mu : (\Gamma^*, \cdot, \varepsilon) \to (S^{n \times n}, \cdot, I)}_{\text{Monoid-Homomorphismus}}$$

$$\longrightarrow \mu(a_1 a_2 \dots a_n) = \prod_i \mu(a_i)$$

dargestellte Potenzreihe

$$[\![D]\!] : \Gamma^* \to S : w \mapsto \lambda^{\mathrm{T}} \cdot \mu(w) \cdot \gamma$$

Für $s \in S\langle\!\langle \Gamma^* \rangle\!\rangle$ gilt:

$$\exists \mathcal{A} \text{ mit } [\![\mathcal{A}]\!] = s \qquad \longleftrightarrow \qquad \exists D \text{ mit } [\![D]\!] = s$$

Äquivalenzproblem

Das *Äquivalenzproblem* für gewichtete Automaten über einem *Körper* ist *entscheidbar*.

Idee: ▷ "$[\![D]\!] \stackrel{?}{=} \mathbb{1}_\emptyset$" ist entscheidbar:

$V_m := [\{\ \lambda^{\mathrm{T}} \cdot \mu(w)\ :\ w \in \Gamma^{\leq m}\ \}]$ (erzeugter UVR von S^n)

$\longrightarrow V_n = V_{n'}$ für alle $n' \geq n$

$\longrightarrow [\![D]\!] = \mathbb{1}_\emptyset$ gdw. $\forall w \in \Gamma^{\leq n}\colon\ \lambda^{\mathrm{T}} \cdot \mu(w) \cdot \gamma = 0.$

▷ $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{B}]\!]$ gdw. $[\![\mathcal{A}]\!] + (-[\![\mathcal{B}]\!]) = \mathbb{1}_\emptyset$

Es ist entscheidbar, ob ein NFA mehrdeutig ist.

Gleichungssysteme

(lineares) Gleichungssystem

$$G_n = \left(X_i = r_{i0} + \sum_{j=1..n} r_{ij} \cdot X_j \right)_{i=1..n}$$

mit formalen Potenzreihen $r_{ij} \in S\langle\langle \Gamma^* \rangle\rangle$

G_n ist *wohlgeformt*, falls:

$$r_{ij}(\varepsilon) = 0 \quad \text{f.a. } i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Für G .. *wohlgeformtes* GS gilt:

- G hat *genau eine* Lösung.
- Sind zusätzlich alle Konstanten und Koeffizienten realisierbar, so hat G Lösung, in der alle Komponenten realisierbar sind.

Für $s \in S\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ sind äquivalent:

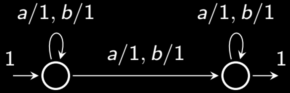
(i) s ist *realisierbar*

(ii) s ist Komponente einer Lösung eines *wohlgeformten GS* mit *realisierbaren* Koeffizienten und Konstanten.

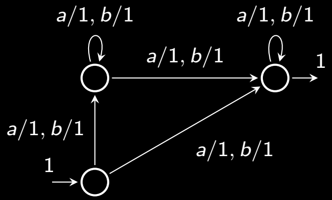
Aufgabe 3

Automat $\mathcal{A}_{1,0}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,0}]\!](w) = r_{1,0}(w) = |w|$

Automat $\mathcal{A}_{1,0}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,0}]\!](w) = r_{1,0}(w) = |w|$

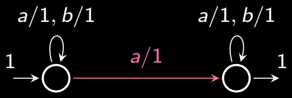


Automat $\mathcal{A}_{1,0}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,0}]\!](w) = r_{1,0}(w) = |w|$

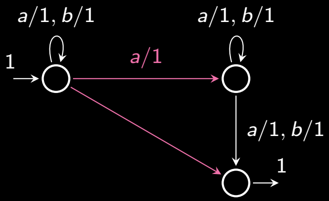


Automat $\mathcal{A}_{1,1}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,1}]\!](w) = r_{1,1}(w) = |w|_a$

Automat $\mathcal{A}_{1,1}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,1}]\!](w) = r_{1,1}(w) = |w|_a$

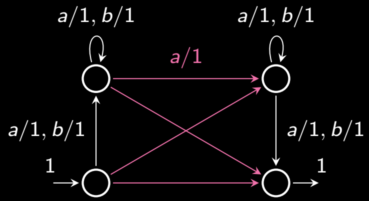


Automat $\mathcal{A}_{1,1}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,1}]\!](w) = r_{1,1}(w) = |w|_a$



$\mathcal{A}_{2,2} := \mathcal{A}_{1,1}$
ähnlich für $\mathcal{A}_{1,2}$ und $\mathcal{A}_{2,1}$

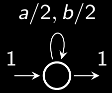
Automat $\mathcal{A}_{1,1}$ mit $[\![\mathcal{A}_{1,1}]\!](w) = r_{1,1}(w) = |w|_a$



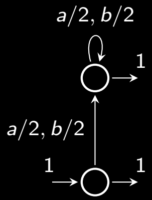
$\mathcal{A}_{2,2} := \mathcal{A}_{1,1}$
ähnlich für $\mathcal{A}_{1,2}$ und $\mathcal{A}_{2,1}$

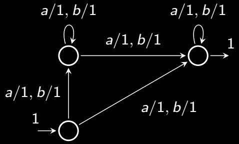
Automat $\mathcal{A}_{2,0}$ mit $[\![\mathcal{A}_{2,0}]\!](w) = r_{2,0}(w) = 2^{|w|}$

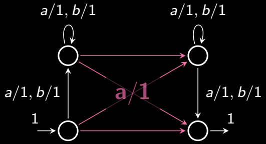
Automat $\mathcal{A}_{2,0}$ mit $[\![\mathcal{A}_{2,0}]\!](w) = r_{2,0}(w) = 2^{|w|}$

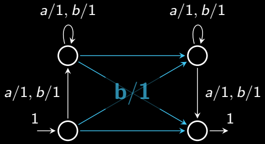


Automat $\mathcal{A}_{2,0}$ mit $[\![\mathcal{A}_{2,0}]\!](w) = r_{2,0}(w) = 2^{|w|}$

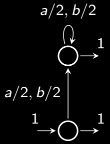


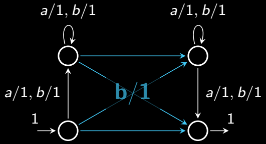


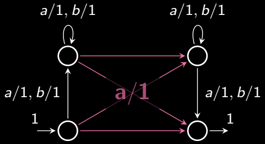




$X_1 = \quad [\![\mathcal{A}_{1,0}]\!] \quad [\![\mathcal{A}_{1,1}]\!] \cdot X_1 \quad [\![\mathcal{A}_{1,2}]\!] \cdot X_2$





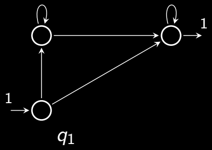


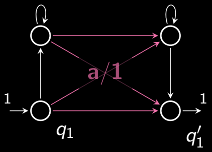
$X_2 = \quad [\![\mathcal{A}_{2,0}]\!] \quad [\![\mathcal{A}_{1,2}]\!] \cdot X_1 \quad [\![\mathcal{A}_{2,1}]\!] \cdot X_2$

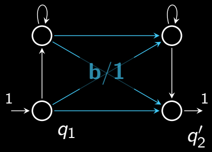
Finalzustände

q_1' q_2'

q_1



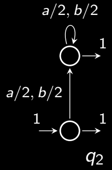


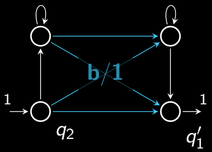


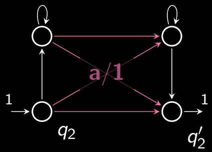
$X_1 = [\![\mathcal{A}_{1,0}]\!] \quad [\![\mathcal{A}_{1,1}]\!] \cdot X_1 \quad [\![\mathcal{A}_{1,2}]\!] \cdot X_2$

---

q_2

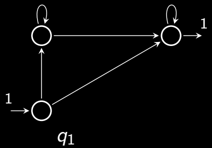
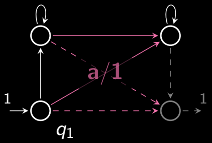
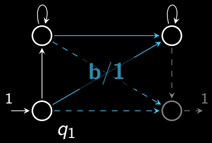
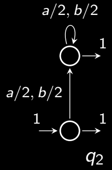
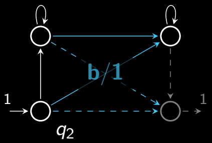
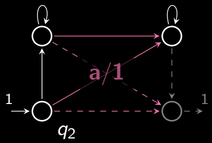


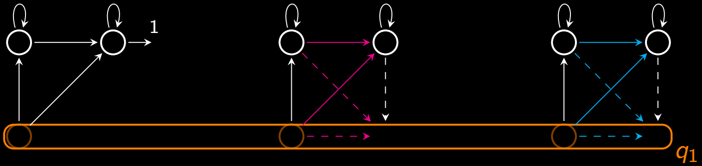




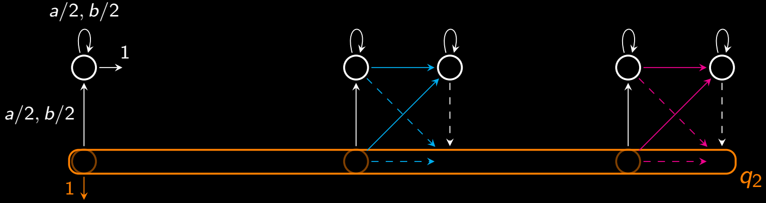
$X_2 = [\![\mathcal{A}_{2,0}]\!] \quad [\![\mathcal{A}_{1,2}]\!] \cdot X_1 \quad [\![\mathcal{A}_{2,1}]\!] \cdot X_2$

Finalzustände

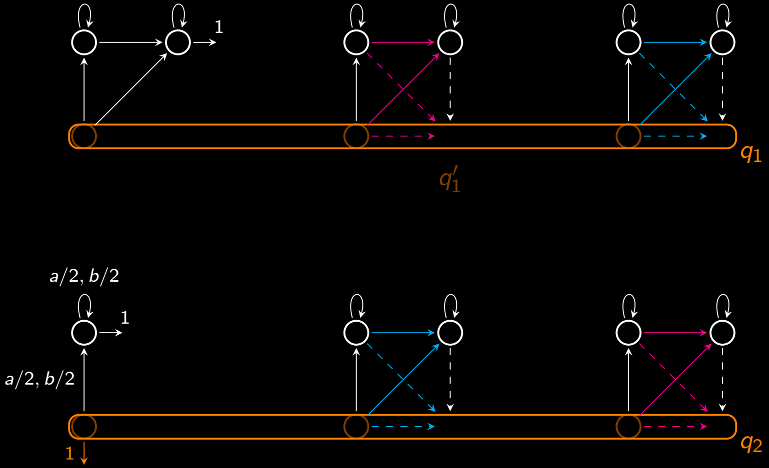
		q_1'	q_2'
q_1			
$X_1 =$	$[\![\mathcal{A}_{1,0}]\!]$	$[\![\mathcal{A}_{1,1}]\!] \cdot X_1$	$[\![\mathcal{A}_{1,2}]\!] \cdot X_2$
q_2			
$X_2 =$	$[\![\mathcal{A}_{2,0}]\!]$	$[\![\mathcal{A}_{1,2}]\!] \cdot X_1$	$[\![\mathcal{A}_{2,1}]\!] \cdot X_2$



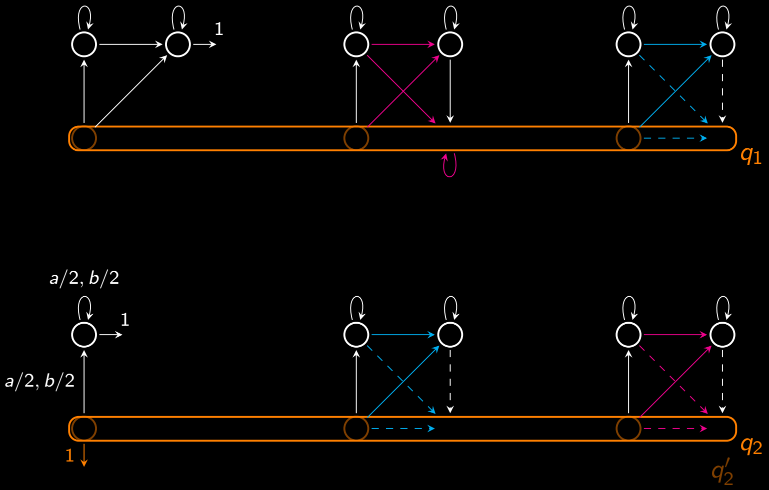
1
q_1



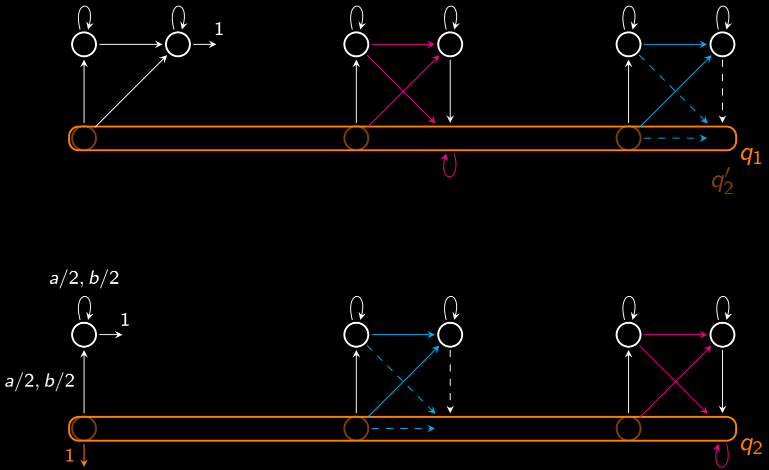
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
1
q_2

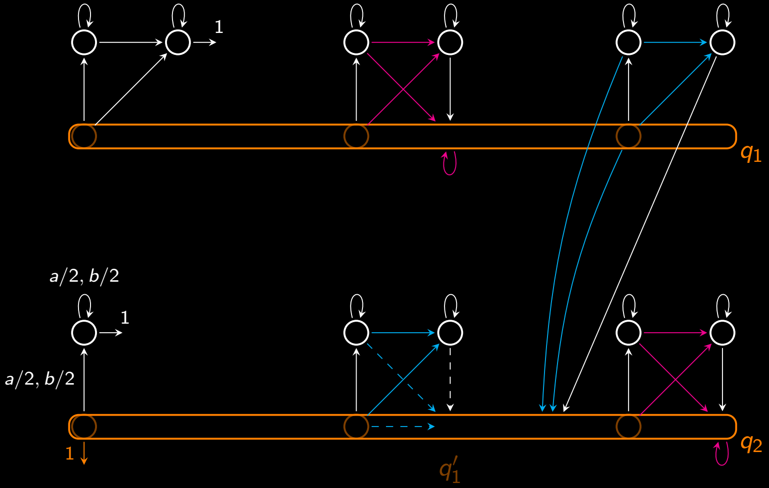


1
q_1
q_1'
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
1
q_2

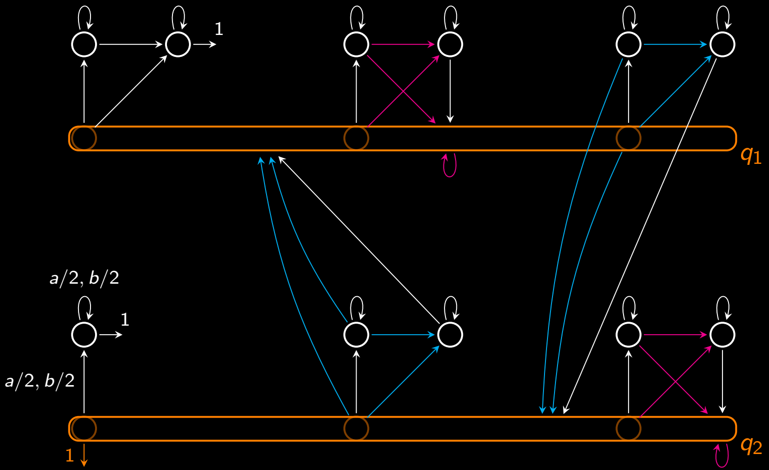


1
q_1
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
1
q_2
q_2'

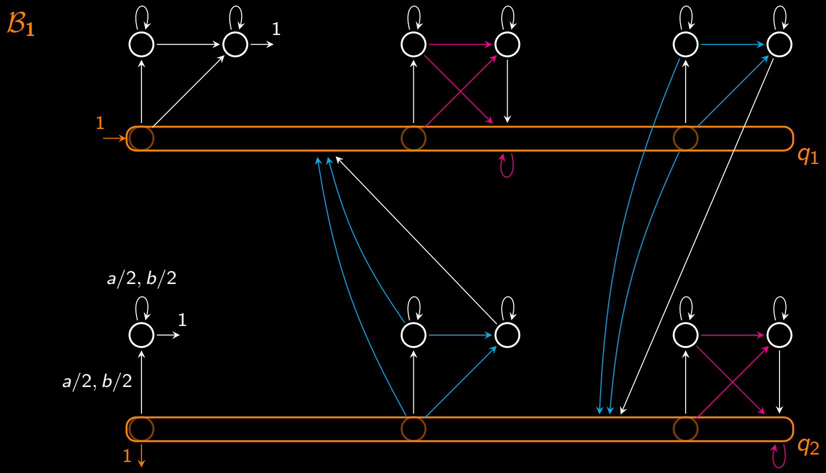

1
q_1
q'_2
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
1
q_2



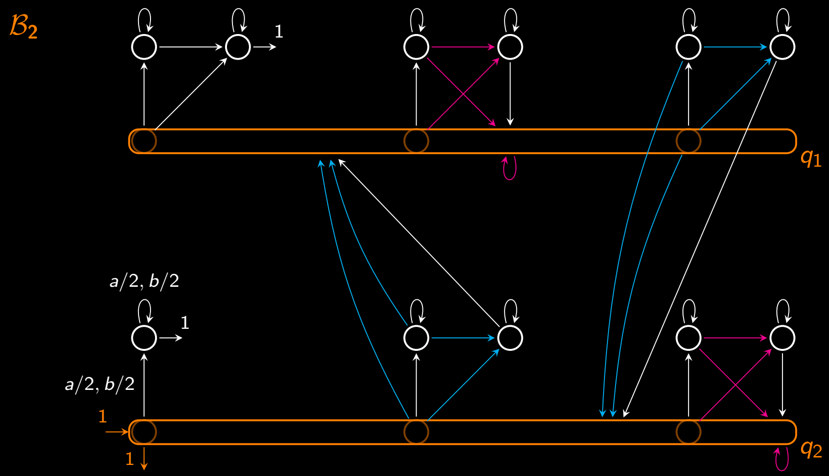
1
q_1
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
q_2
1
q_1'



1
a/2, b/2
1
a/2, b/2
1
q1
q2



$\mathcal{B}_1$
1
1
q_1
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
1
q_2



$\mathcal{B}_2$
1
q_1
$a/2, b/2$
1
$a/2, b/2$
1
1
q_2