**TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik**
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
**ILMENAU**

# Automatentheorie – Übung 6

Besprechung: Dienstag, den 25. Juni 2024, um 13:15 Uhr

## Aufgabe 1

Seien $K$ ein Körper, $D$ und $D'$ lineare Darstellungen über $K$, sowie $c \in K$. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Zeigen Sie, dass es einen gewichteten Automaten $\mathcal{A}$ mit $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![D]\!]$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass $c \cdot [\![D]\!]$ eine lineare Darstellung besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $[\![D]\!] + [\![D']\!]$ eine lineare Darstellung besitzt.

## Aufgabe 2

Für einen festen Semiring $S$ betrachten wir das folgende Problem:

| | |
|---|---|
| **Eingabe** | gewichteter Automat $\mathcal{A}$ über $S$ |
| **Frage** | ist $[\![\mathcal{A}]\!]$ konstant? |

Geben Sie jeweils einen Algorithmus an, der das angegebene Problem löst, wobei

(a) $S = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ der Körper der rationalen Zahlen bzw.

(b) $S = (\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$ der arktische Semiring über den natürlichen Zahlen ist.

Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihres Verfahrens.

**Aufgabe 3**

Sei $\Gamma = \{a, b\}$. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem $\mathcal{G}_2$ über dem Semiring $\mathbb{N}_{+,\cdot}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= r_{1,0} + r_{1,1} \cdot X_1 + r_{1,2} \cdot X_2 \\ X_2 &= r_{2,0} + r_{2,1} \cdot X_1 + r_{2,2} \cdot X_2 \,, \end{aligned}$$

wobei für alle $w \in \Gamma^*$

$$\begin{aligned} &r_{1,0}(w) = |w|\,, && r_{1,1}(w) = |w|_a\,, && r_{1,2}(w) = |w|_b\,, \\ &r_{2,0}(w) = 2^{|w|}\,, && r_{2,1}(w) = |w|_b \quad \text{und} && r_{2,2}(w) = |w|_a \end{aligned}$$

gilt. Konstruieren Sie gewichtete Automaten $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ über $\mathbb{N}_{+,\cdot}$ so, dass $(X_1, X_2) = ([\![\mathcal{B}_1]\!], [\![\mathcal{B}_2]\!])$ eine Lösung des Gleichungssystems $\mathcal{G}_2$ ist.

**Aufgabe 4**

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Seien $\Gamma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $G = (\Gamma, \{S, A, B\}, S, P)$ die rechtslineare Grammatik mit den Produktionen

$$S \to \varepsilon \mid aA \mid bA \mid bB \qquad A \to \varepsilon \mid aA \mid bB \qquad B \to \varepsilon\,.$$

Wir schreiben $G|_A$ für die Grammatik, die aus $G$ entsteht, indem $A$ als Startsymbol gesetzt wird (analog für $G|_B$).

Konstruieren Sie zu $G$ ein Gleichungssystem $\mathcal{G}$ derart, dass für alle $L \subseteq \Gamma^*$ gilt: $L$ ist genau dann die erste Komponente einer Lösung von $\mathcal{G}$, wenn $L = L(G)$ ist.

(b) Seien $\Gamma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $\mathcal{G}_2$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{1}_{(aa)^*} + \mathbb{1}_{\{a\}} \cdot X_1 + \mathbb{1}_{\{b\}} \cdot X_2 \\ X_2 &= \mathbb{1}_{\{b\}} + \mathbb{1}_{(aa)^+} \cdot X_2\,. \end{aligned}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G$ derart an, dass für alle $L \subseteq \Gamma^*$ gilt: $L$ ist genau dann die erste Komponente einer Lösung von $\mathcal{G}_2$, wenn $L = L(G)$ ist.

(c) Sei $\Gamma$ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass für eine Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $L$ ist regulär

(ii) $\mathbb{1}_L$ ist Komponente einer Lösung eines wohlgeformten Gleichungssystems, in dem alle Koeffizienten Monome der Form $\mathbb{1}_\emptyset$ oder $\mathbb{1}_{\{a\}}$ für $a \in \Gamma$ und alle Konstanten entweder $\mathbb{1}_\emptyset$ oder $\mathbb{1}_\varepsilon$ sind

(iii) $\mathbb{1}_L$ ist Komponente einer Lösung eines wohlgeformten Gleichungssystems, in dem alle Koeffizienten und Konstanten charakteristische Funktionen von regulären Sprachen sind.