TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Christopher Hugenroth, M.Sc. Sebastian Pfau
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 3

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Welche Funktion berechnet die folgende Turingmaschine M?

$$M = \big(\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\}\big) \quad \text{mit}$$

δ	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, \square, L)$
z_1	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, 0, N)$
z_2	$(z_2, \square, L)$	$(z_2, \square, L)$	$(z_3, \square, R)$
z_3	$(z_e, 0, N)$	$(z_e, 1, N)$	$(z_3, \square, R)$
z_e	$(z_e, 0, N)$	$(z_e, 1, N)$	$(z_e, \square, N)$

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils eine Turingmaschine an (formal als Tupel, vgl. Aufgabe 1), die die folgenden Funktionen umsetzt:

(a) Für ein Wort $w = w_1 \dots w_n \in \{0,1\}^*$, $w_i \in \{0,1\}$ sei $\overline{w} = \overline{w_1} \dots \overline{w_n}$ das Wort mit

$$\overline{w_i} = \begin{cases} 1, \text{falls } w_i = 0 \\ 0, \text{falls } w_i = 1. \end{cases}$$

Die Funktion f ist definiert als $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon \mathrm{bin}(w) \mapsto \mathrm{bin}(\overline{w})$. Dabei soll $\mathrm{bin}(w)$ die natürliche Zahl sein, die der Binärcodierung von w entspricht mit höchstwertigstem Bit links.

(b) Für ein Wort $w = w_1 \dots w_{n-1} w_n$ sei $g(w) = w_n w_1 \dots w_{n-1}$. Das heißt der letzte Buchstabe von w wird an den Anfang des Wortes verschoben.

(c) Sei h die charakteristische Funktion der Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \text{ gerade }\}$. Das bedeutet $h\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ und $h(w) = 1$ genau dann wenn w eine gerade Anzahl von 1en enthält.

Aufgabe 3

Sei $\varphi : \Sigma^+ \to \Gamma^+$ ein Homomorphismus bezüglich der Konkatenation. Das heißt es gilt:
$\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2)$ für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^+$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ definieren wir die φ-Sprache von L als $\varphi(L) = \{\varphi(w) \mid w \in L\} \subseteq \Gamma^+$. Zeigen sie: Wenn $\varphi(L)$ regulär ist, dann ist auch L regulär.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Das Band einer Turingmaschine ist laut Vorlesung in beide Richtungen unbeschränkt. Wir betrachten ein alternatives Modell, in dem das Band nur nach rechts unbeschränkt ist. Eine *einseitig beschränkte Turingmaschine* ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \#, E)$, wobei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine ist mit

- $\# \in \Gamma \setminus (\Sigma \cup \{\square\})$
  (# markiert das linke Ende des Bandes),
- $\delta(z, \#) \in Z \times \{\#\} \times \{R\}$ für alle $z \in Z$
  (Befindet sich der Kopf von M am linken Rand des Bandes, so muss sich dieser als nächstes nach rechts bewegen ohne den Inhalt des Bandes zu verändern) und
- $\delta(z, a) \in Z \times (\Gamma \setminus \{\#\}) \times \{L, N, R\}$ für alle $z \in Z$, $a \in \Gamma \setminus \{\#\}$
  (Die Markierung # wird nie an eine andere Stelle als den linken Rand geschrieben).

Eine einseitig beschränkte Turingmaschine M berechnet die partielle Funktion $f_M : \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ mit

$$f_M(v) = w \quad \longleftrightarrow \quad \exists z \in E, i \in \mathbb{N}\colon \#z_0v \vdash_M^* \#zw\square^i \text{ und } \#zw\square^i \text{ ist Haltekonfiguration.}$$

Zeigen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion f durch eine einseitig beschränkte Turingmaschine berechenbar ist. Es genügt, wenn Sie das Verhalten einer einseitig beschränkten Turingmaschine für f beschreiben, ohne diese explizit als Tupel anzugeben.

Aufgabe 5

Zeigen sie, dass es zu jeder regulären Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ eine Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, mit $f_M : \Sigma^* \dashrightarrow \{0, 1\}$, $f_M(w) = 1$, falls $w \in L$ und $f_M(w) = 0$ sonst.

Aufgabe 6

Zeigen sie, dass es zu jeder Turing-berechenbaren Funktion $f : \{0, 1\}^* \dashrightarrow \{0, 1\}^*$ eine Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, mit $\Gamma = \{0, 1, \square\}$, die f berechnet.