TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Christopher Hugenroth, M.Sc. Sebastian Pfau
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 4

Abgabe: bis Freitag, der 24. Mai 2024, um 11:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* 2 Punkte

Welche Funktion berechnet die folgende Turingmaschine M?

$$M = \big(\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\}\big) \quad \text{mit}$$

δ	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, \square, R)$	$(z_1, 1, R)$	$(z_e, 0, N)$
z_1	$(z_1, 0, R)$	$(z_1, 1, R)$	$(z_2, \square, L)$
z_2	$(z_2, 1, L)$	$(z_3, 0, L)$	$(z_e, 0, N)$
z_3	$(z_3, 0, L)$	$(z_3, 1, L)$	$(z_e, \square, R)$
z_e	$(z_e, 0, N)$	$(z_e, 1, N)$	$(z_e, \square, N)$

Aufgabe 2* 2+3 Punkte

Geben Sie jeweils eine Turingmaschine an (formal als Tupel, vgl. Aufgabe 1), die

(a) bei Eingabe eines nicht-leeren Wortes $w \in \{0,1\}^+$ prüft, ob w eine Binärdarstellung einer durch 4 teilbaren Zahl ist (u.U. mit führenden Nullen), im positiven Fall 1 ausgibt und andernfalls 0. Bei Eingabe von ε soll die Maschine (ohne Forderungen an die Ausgabe) terminieren.

(b) bei Eingabe von $w \in \{0,1\}^*$ das Wort $w\#w$ berechnet. Bei Eingaben von anderer Form, also wenn # als Teil der Eingabe auftritt, soll die Maschine (ohne Forderung an die Ausgabe) terminieren.

Aufgabe 3* 2+2 Punkte

Sei $\varphi : \Sigma^+ \to \Gamma^+$ ein Homomorphismus bezüglich der Konkatenation. Das heißt es gilt:
$\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2)$ für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^+$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ definieren wir die φ-Sprache von L als $\varphi(L) = \{\varphi(w) \mid w \in L\} \subseteq \Gamma^+$. Zeigen sie:

(a) Wenn $\varphi(L)$ deterministisch kontextfrei ist, dann ist auch L deterministisch kontextfrei.

(b) Wenn die charakteristische Funktion von $\varphi(L)$ Turing-berechenbar ist, dann ist auch die charakteristische Funktion von L Turing-berechenbar.

Bitte wenden!

Aufgabe 4* 4 Punkte

Ein 2-Keller-Automat ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$, wobei die einzelnen Komponenten die gleiche Bedeutung haben wie bei einem Kellerautomaten mit Endzuständen. Jedoch besitzt ein 2-Keller-Automat zwei Kellerspeicher, die in jedem Berechnungsschritt gelesen und aktualisiert werden. Somit hat die Transitionsfunktion die Gestalt

$$\delta \colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$$

und eine Konfiguration von A ist beschrieben durch ein Tupel $(z, w, \alpha_1, \alpha_2) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^*$. Ein Konfigurationsübergang hat die Form

$$(z, aw, b_1\alpha_1, b_2\alpha_2) \vdash_M (z', w, \gamma_1\alpha_1, \gamma_2\alpha_2)$$

mit $z, z' \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w \in \Sigma^*, b_1, b_2 \in \Gamma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$ und ist genau dann möglich, wenn $(z', \gamma_1, \gamma_2) \in \delta(z, a, b_1, b_2)$ gilt. Eine Haltekonfiguration ist eine Konfiguration ohne Nachfolger und eine Konfiguration $(z, w, \alpha_1, \alpha_2)$ ist akzeptierend, wenn $z \in E$ und $w = \varepsilon$ gilt.

Zeigen Sie, dass es zu jeder Turing-berechenbaren Funktion $f \colon \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ einen 2-Keller-Automaten gibt, der für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ von der initialen Konfiguration $(z_0, w, \#, \#)$ genau dann eine akzeptierende Haltekonfiguration erreicht, wenn $f(w)$ definiert ist und in diesem Fall der Inhalt des zweiten Kellers genau $f(w)\#$ ist. Es genügt, wenn Sie das Verhalten des 2-Keller-Automaten für f beschreiben, ohne diesen explizit anzugeben.