

## Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 6

Abgabe: bis Freitag, der 14. Juni 2024, um 11:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

**Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.  
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.**

### Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

#### Aufgabe 1\*

1+1+1+2 Punkte

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet mit  $\{0, 1\} \subseteq \Sigma$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Die Reduzierbarkeitsbeziehung  $\leq$  ist reflexiv und transitiv.
- (b) Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  zwei entscheidbare Probleme mit  $\emptyset \neq B \neq \Sigma^*$ . Dann gilt  $A \leq B$ .
- (c) Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  mit  $A \leq B$ . Dann gilt auch  $\Sigma^* \setminus A \leq \Sigma^* \setminus B$ .
- (d) Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  und  $C = \{0\}A \cup \{1\}B$ . Dann gilt:
  - (i)  $A, B \leq C$  und
  - (ii)  $C \leq D$  für alle  $D \subseteq \Sigma^+$  mit  $A, B \leq D$ .

#### Aufgabe 2\*

6 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind.

- (a)  $L_a = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ akzeptiert keine Eingabe}\}$
- (b)  $L_b = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ hat mehr als drei Zustände}\}$
- (c)  $L_c = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ berechnet die charakteristische Funktion des Halteproblems}\}$
- (d)  $L_d = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ berechnet die halbe charakteristische Funktion (siehe Folie 8.9) von PCP}\}$

*Hinweis.* Falls Sprache  $L_x$  entscheidbar ist, beschreiben Sie eine Turingmaschine, die diese entscheidet. Ansonsten können Sie den Satz von Rice verwenden, um die Unentscheidbarkeit zu zeigen, d.h. spezifizieren Sie  $\mathcal{S}$ , zeigen Sie  $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$  und zeigen Sie  $C(\mathcal{S}) = L_x$ .

#### Aufgabe 3\*

4 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen von Korrespondenzsystemen entscheidbar sind:

- (a) Die Menge  $E$  der Korrespondenzprobleme über dem Alphabet  $\{1\}$ , die eine Lösung besitzen.
- (b) Die Menge BPCP der Korrespondenzprobleme über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ , die eine Lösung besitzen.
- (c) Die Menge UPCP der Korrespondenzsysteme, die eine Lösung besitzen, in der jedes Paar höchstens ein Mal auftritt.