TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Christopher Hugenroth, M.Sc. Sebastian Pfau
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 7

Abgabe: bis Freitag, der 28. Juni 2024, um 11:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Das *Palindromproblem*[1] für kontextfreie Sprachen ist wie folgt definiert:

Eingabe: kontextfreie Grammatik G
Frage: Enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Zeigen Sie, dass das Palindromproblem für kontextfreie Sprachen unentscheidbar ist.

Hinweis. Reduzieren Sie PCP auf dieses Problem.

Aufgabe 2* — 2+2 Punkte

Bearbeiten sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Für $a \in \mathbb{N}$ sei $\mathbf{EVEN}(a)$ genau dann wahr, wenn a gerade ist. Zeigen sie, dass die Theorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \mathbf{EVEN})$ der natürlichen Zahlen mit Addition und dem unären Prädikat **EVEN** entscheidbar ist.

Hinweis. Reduzieren Sie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \mathbf{EVEN})$ auf $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$; z.B. können Sie zu einer Formel φ, in welcher Relationen **EVEN** vorkommen, eine äquivalente Formel φ' konstruieren, welche ohne diese auskommt.

(b) Für eine ganze Zahl $m \geq 2$ bezeichne das unäre Prädikat d_m die Teilbarkeit durch m auf der Menge der natürlichen Zahlen d.h., für $a \in \mathbb{N}$ gilt $d_m(a)$ genau dann, wenn a ein ganzzahliges Vielfaches von m ist. Zeigen sie, dass die Theorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, (d_m)_{m \geq 2})$ der natürlichen Zahlen mit Addition und Teilbarkeiten entscheidbar ist.

Aufgabe 3* — 3+4 Punkte

Bearbeiten sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Ein *co-NFA* M ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$. Der einzige Unterschied zu NFAs ist, dass M ein Wort $w \in \Sigma^*$ nur dann akzeptiert, wenn *jeder* w-Weg von einem Startzustand zu einem Endzustand führt. Formal bedeutet das: $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(S, w) \subseteq E)$. Zeigen sie, dass jede von einem co-NFA akzeptierte Sprache regulär ist.

(b) Ein *co-PDAE* M ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \iota, \delta, \#, E)$. Der einzige Unterschied zu einem PDAE ist, dass M ein Wort nur dann akzeptiert, wenn *jeder* w-Weg von ι zu einem Endzustand führt. Formal bedeutet das: $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Für alle } z \in Z \text{ und } \gamma \in \Gamma^* \text{ mit } (\iota, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \gamma) \text{ gilt: } z \in E\}$. Zeigen sie, dass es einen co-PDAE M gibt, sodass $L(M)$ nicht kontextfrei ist.

[1] Ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist ein *Palindrom*, falls $w = a_1 a_2 \cdots a_l = a_l a_{l-1} \cdots a_1$ für $a_1, \ldots, a_l \in \Sigma$ gilt.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M eine Turingmaschine mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle Eingaben $x \in L$ hält M nach höchstens $|x|^2$ vielen Schritten und gibt 1 aus.
- Für alle Eingaben $x \notin L$ hält M nach höchstens $2^{|x|}$ vielen Schritten und gibt 0 aus.

Gilt $L \in \mathrm{P}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

Wir betrachten folgendes Problem (Clique):

Eingabe:	Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Gibt es k Knoten in G, die paarweise verbunden sind? D.h. gibt es $v_1, \dots, v_k$ mit $v_i \neq v_j$ und $(v_i, v_j) \in E$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$.

Sei CLIQUE die Menge $\{(G, k) \mid G$ hat k paarweise verbundene Knoten$\}$. Zeigen Sie, dass CLIQUE in NP ist.

Aufgabe 6

Für eine Komplexitätsklasse K sei coK die Klasse der Sprachen, deren Komplement in K ist.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit P = coP.

(b) Erklären Sie, weshalb ein analoges Argument für NP und coNP fehlschlägt.

Anmerkung. Es ist im Übrigen nicht bekannt, ob NP = coNP gilt.