Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Seminarraum Humboldtbau 211/212
Mittwoch, den 20. 03. 2024
Beginn: 8.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	10	12	15	14		51
erreichte Punkte						
Note						

Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Aufgabe 1

10 Punkte

Untersuchen Sie für jedes der folgenden skalaren Anfangswertprobleme die rechte Seite auf

I. stückweise Stetigkeit in t,

II. Stetigkeit in x,

III. lokale bzw. globale Lipschitz-Stetigkeit in x

und schließen Sie dann mit den Sätzen von Peano und Picard-Lindelöf auf Existenz und Eindeutigkeit des jeweiligen Anfangswertproblems:

a) $\dot{x} = (\operatorname{sign} t)|x|, \quad x(0) = 0$

b) $\dot{x} = -(1-x)^2, \quad x(0) = 1$

c) $\dot{x} = \frac{1}{t-1}x^3, \quad x(2) = 0$

d) $\dot{x} = \frac{1}{\sin x}, \quad x(0) = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 2

12 Punkte

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1\\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_1(a + x_1^2) + a x_3\end{aligned}$$

mit $x_i(t) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ und dem reellen Parameter $a \neq 0$.

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

b) Linearisieren Sie das System am Ursprung.

c) Welche Stabilitätsaussagen können Sie mit Hilfe der Linearisierung treffen? Grenzen Sie dazu bei Bedarf den zulässigen Parameterbereich ein.

d) Finden Sie eine reguläre, lineare Koordinatentransformation $z = Tx$ so, dass die Dynamik in z-Koordinaten in zwei entkoppelten Teilsystemen vorliegt, das heißt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{pmatrix} &= f_\alpha(z_1, z_2)\\ \dot{z}_3 &= f_\beta(z_3).\end{aligned}$$

Hinweis: Sie können einen Ansatz $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ T_{21} & 1 & 0\\ T_{31} & T_{32} & 1\end{pmatrix}$ verwenden.

e) Untersuchen Sie die Teilsysteme in den z-Koordinaten mit geeigneten Methoden auf Stabilität. Können Sie globale Stabilitätsaussagen treffen?

f) Wie lassen sich die Stabilitätsaussagen auf das System in originalen Koordinaten übertragen?

Aufgabe 3

15 Punkte

Gegeben sei ein Starrkörpersystem mit zwei mechanischen Freiheitsgraden. Die kinetische Energie $T(t)$, die potentielle Energie $U(t)$ sowie die freien Kräfte $Q_i(t)$ in den Koordinaten $q = (q_1, q_2)^\top$ seien

$$\begin{aligned} T(t) =& \frac{1}{2} a\, \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b \left(2\cos(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) \\ U(t) =& c\cos(q_2) \\ Q_i(t) =& F_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

mit den Parametern $a, b, c > 0$.

a) Nutzen Sie den Lagrange-Formalismus, um mittels

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2$$

die Systemdifferentialgleichungen herzuleiten.

b) Bringen Sie das System in die übliche Darstellung

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q, \dot{q})u\,. \tag{1}$$

Zeigen sie zudem die Schiefsymmetrie von $\dot{D} - 2C$.

Im folgenden sei ein PD-Folgeregler gegeben, der das System entlang einer Solltrajektorie $q = q^*(t)$ stabilisiert. Der Ansatz lautet

$$u = Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_r)p - Ks \tag{2}$$

mit den Hilfsgrößen $Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_r) = \frac{\partial}{\partial p}\left(D(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)\right)$, $p = (a, b, c)^\top$, $s = \dot{q} - \dot{q}_r$ und $\dot{q}_r = \dot{q}^* - \Lambda(q - q^*)$ mit $\Lambda > 0$ und $K > 0$.

c) Zeigen Sie durch Aufstellen der Fehlerdynamik bzgl. Folgefehler $e(t) = q(t) - q^*(t)$, dass der Regler (2) das System (1) entlang der Solltrajektorie $q = q^*(t)$ stabilisiert.

Bei unbekanntem Parametervektor $p = (a\ \ b\ \ c)^\top$ kann der Regler (2) mit der Schätzung $\hat{p} = (\hat{a}\ \ \hat{b}\ \ \hat{c})^\top$ auf eine adaptive PD-Folgeregelung erweitert werden, gegeben als

$$u = Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_r)\hat{p} - Ks \tag{3a}$$

$$\dot{\hat{p}} = -\,P\, Y^\top(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_r)s. \tag{3b}$$

mit $P = P^\top > 0$.

Seien nun die freien Kräfte F_1, F_2 durch unbekannte konstante Störungen d_1, d_2 gestört, d.h.

$$u = \begin{pmatrix} F_1 + d_1 \\ F_2 + d_2 \end{pmatrix}.$$

d) Beschreiben Sie qualitativ, wie der adaptive Regler (3) erweitert werden kann, um trotz der unbekannten Eingangsstörung das System entlang der Solltrajektorie $q = q^*(t)$ zu stabilisieren.

Aufgabe 4

14 Punkte

Gegeben ist das nichtlineare System

$$\dot{x} = f(x,u) \quad \text{mit} \quad f(x,u) = \begin{pmatrix} -c\,x_1 - x_1^3 - x_2\,x_1^3\,u \\ x_2 + \left(1 + x_1^4\right) u \end{pmatrix}$$

und konstantem Koeffizienten $c \in \mathbb{R}$, Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$. Durch Regelung mit nichtlinearer Dämpfung soll die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ asymptotisch stabilisiert werden.

a) Überprüfen Sie die lokale asymptotische Stabilität der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ des freien Systems ($u \equiv 0$) in Abhängigkeit des Parameters c anhand der Jacobi-Linearisierung bei $x_\mathrm{R} = 0$.

b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ kann die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ durch eine Zustandsrückführung der Form $u = \bar{u}(x) = k_1\,x_1 + k_2\,x_2$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ lokal asymptotisch stabilisiert werden? Wie müssen k_1 und k_2 in diesem Fall gewählt werden?

c) Zeigen Sie, dass die Stabilität der Ruhelage des mit Zustandsrückführung $u = \bar{u}(x)$ für $k_1 = 0$ geschlossenen Regelkreises mit einer Lyapunov-Funktion der Form $V(x) = \frac{1}{2} p_1\,x_1^2 + \frac{1}{2} p_2\,x_2^2$ mit $p_1, p_2 > 0$ bewiesen werden kann. Wie müssen p_1 und p_2 dafür gewählt werden?

Nachfolgend soll ein $\mathcal{L}_g V$-Regler für den geschlossenen Regelkreis mit der Zustandsrückführung $u = \bar{u}(x)$ mit $k_1 = 0$ entworfen werden.

d) Entwerfen Sie einen $\mathcal{L}_g V$-Regler, $u_{\mathcal{L}_g V}(x)$, mit positiv definiter Verstärkung. Für welche Wahl von p_1, p_2 ist das Regelgesetz $u = \bar{u}(x) + u_{\mathcal{L}_g V}(x)$ ausschließlich vom Zustand x_2 abhängig?

e) Stabilisiert das Regelgesetz $u = \bar{u}(x) + u_{\mathcal{L}_g V}(x)$ die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ global asymptotisch?