Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax

Mittwoch, den 28. 02. 2024

Beginn: 11.30 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ________________________

Matr.-Nr.: ________________________

Studiengang: ________________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	13	14	16	12		55
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

13 Punkte

Gegeben ist das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & 1 \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche Werte von p ist das System steuerbar? Für welche Werte von p ist es beobachtbar?

Geregelt wird das System nun mit einer dynamischen Ausgangsrückführung:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)E(s)\} \quad \text{mit} \quad E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\} = \mathcal{L}\{r(t) - y(t)\} \quad \text{und} \quad C(s) = \frac{\tau s + 1}{s}.$$

b) Bestimmen Sie eine Zustandsraumdarstellung der Form

$$\dot{x}_\mathrm{R}(t) = A_\mathrm{R}\, x_\mathrm{R}(t) + B_\mathrm{R}\, e(t)$$
$$u(t) = C_\mathrm{R}\, x_\mathrm{R}(t) + D_\mathrm{R}\, e(t),$$

welche den Regler $C(s)$ realisiert.

c) Geben Sie die Zustandsdarstellung des geschlossenen Regelkreises mit Zustand $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_\mathrm{R} \end{pmatrix}$ an.

d) Für welche Parameter $\tau > 0$ und p ist der geschlossene Regelkreis stabil.

Aufgabe 2

14 Punkte

Untersuchen Sie eine Ausgangsrückführung für das System

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=C} x(t).$$

Dabei ist $x(t) \in \mathbb{R}^2$ der Zustand, $y(t) \in \mathbb{R}$ der Ausgang, $u(t) \in \mathbb{R}$ das Stellsignal und $d \in \mathbb{R}$ eine konstante, eingangsseitige Störung.

a) Es seien zunächst $u \equiv 0$, $d = 0$. Welche Stabilitätseigenschaft hat die Ruhelage $x_R = 0$?

b) Können durch die Zustandsrückführung

$$u(t) = k^\top x(t)$$

mit $k \in \mathbb{R}^2$ beliebige Eigenwertlagen der Matrix $A + Bk^\top$ vorgegeben werden?

c) Bestimmen Sie $k_1 \in \mathbb{R}$ derart, dass die Ausgangsrückführung

$$u(t) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \end{pmatrix} x(t) = k_1 y(t)$$

alle Eigenwerte von $A + B \begin{pmatrix} k_1 & 0 \end{pmatrix}$ bei -2 platziert.

Falls Sie die Teilaufgabe c) nicht lösen konnten, nutzen Sie im Folgenden $k_1 = -5$.

d) Schließen Sie den Regelkreis nun mit dem Regelgesetz

$$u(t) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + K_I \int_0^t y(\tau) \mathrm{d}\tau$$

mit $K_I \in \mathbb{R}$ und stellen Sie das um den Integriererzustand $x_I(t) = \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$ erweiterte Zustandsraummodell des geschlossenen Kreises auf.

e) Bestimmen Sie ein K_I so, dass die Systemmatrix des geschlossenen Kreises Hurwitz ist.

f) Sei $d = 1$. Welchen Wert nimmt $y(t)$ für $t \to \infty$ an?

Aufgabe 3

16 Punkte

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie die Stabilität des freien Systems ($u \equiv 0$) an der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$.

b) Geben Sie die Lösung $x = x(i)$ des Systems in Abhängigkeit vom Angangszustand $x(0)$ und $u(0)$, $u(1), \ldots, u(i-1)$ für allgemeine A, B an.

c) Bestimmen Sie $u(0)$ und $u(1)$, die den Anfangszustand $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$ in den Zustand $x(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\top$ überführen. Existiert ein Eingang $u(2)$ so, dass $x(3) = x(2)$ gilt?

d) Ist das System vollständig erreichbar?

Betrachten Sie nun das mit Regler $u(i) = k^\top x(i)$ und $k^\top = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ geregelte System.

e) Geben Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises an und bestimmen Sie deren Eigenwerte. Ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil? Ist das ungeregelte System vollständig steuerbar?

Aufgabe 4 **12 Punkte**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^3$, Eingang $u(t) \in \mathbb{R}^2$ und Ausgang $y(t) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Entkopplungsmatrix des Systems.

b) Zeigen Sie, dass das System statisch entkoppelbar ist.

c) Geben Sie den Vektorrelativgrad $d = (d_1 \;\; d_2)$ des Systems an und bestimmen Sie Matrizen K und F im entkoppelnden Regelgesetz $u(t) = K\,x(t) + F\,r(t)$.

d) Hat das geregelte System eine Nulldynamik? Falls ja, geben Sie die Ordnung der Nulldynamik $\dot{\eta} = Q\,\eta$ an und bestimmen Sie Q, indem Sie $y \equiv 0$ setzen.

e) Nun soll die Ausgangsrückführung $r = -y$ verwendet werden. Welchen Wert nimmt $y(t)$ für $t \to \infty$ im entkoppelten System im geschlossenen Regelkreis an? Ist das System im geschlossenen Regelkreis stabil?